ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 27 (1998) 1–29

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Opérateurs aux différences finies, calcul pseudo-différentiel et représentations des groupes de Lie ★

Martin Andler [a,*], Dominique Manchon [b,1]

[a] *Laboratoire de Mathématiques, EP CNRS 1755, Université de Versailles Snait-Quentin, 45 Av. des Etats-Unis, 78035 Versailles Cedex, France*

[b] *Institut Elie Cartan – UMR CNRS 9973, Université de Nancy, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France*

Received 8 May 1997

Abstract

We investigate the canonical commutation relations on a one-dimensional lattice. In the continuum, the commutation relations can be interpreted in terms of representations of the three-dimensional Heisenberg group. Here the Heisenberg group is replaced by a (variable) three-dimensional solvable Lie group with parameter $h\delta$, where h is a constant, and δ is the distance between two neighbouring points in the lattice. We apply the pseudo-differential calculus developed in Manchon [Acta App. Math. 2 (1993) 159–183] to obtain a pseudo-differential calculus for finite difference operators. We also investigate the behaviour when $\delta \to 0$ (the continuum limit). It is relevant to consider an extension of degree 2 of the three-dimensional Heisenberg group rather than the Heisenberg group itself. By means of multiresolution analysis, we give a precise formulation of this fact by embedding square-integrable functions on the lattice into pairs of square-integrable functions on the real line. Then we investigate the behaviour in the continuum limit of pseudo-differential operators with symbols living on the dual of the Lie algebra. © 1998 Elsevier Science B.V.

1991 MSC: 22, 35, 39, 81

Keywords: Lie groups; Representations; Finite difference operators; Heisenberg; Multiresolution analysis; Pseudo-differential operators

★ Nous remercions Stephan de Bièvre et Jean Nourrigat pour d'utiles conversations.

* Corresponding author. E-mail: andler@math.uvsq.fr.

[1] E-mail: manchon@iecn.u-nancy.fr.

PII S0393-0440(97)00064-8

1. Introduction

Lorsque l'on considère les relations de commutation de la mécanique quantique en dimension 1:

$$[p, q] = -\mathrm{i}h \tag{1.1}$$

il est naturel d'introduire le groupe de Heisenberg G de dimension 3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de ce groupe est engendrée comme espace vectoriel par les éléments P, Q, E avec la relation:

$$[P, Q] = E \tag{1.2}$$

les autres crochets étants nuls. Pour tout $h \neq 0$, le théorème de Stone–von Neumann affirme qu'il existe à équivalence près une unique classe de représentations unitaires irréductibles π_h de G telle que $\pi_h(E) = -\mathrm{i}h$ Id. On obtient une réalisation de cette représentation dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\pi_h(\exp(xP + yQ + zE))\varphi(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h(z+xy/2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}uy}\varphi(u - hx). \tag{1.3}$$

La représentation infinitésimale correspondante de $\mathfrak{g}_0$, notée encore π_h:

$$\pi_h(P) = -h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}, \qquad \pi_h(Q) = \mathrm{i}\,u, \qquad \pi_h(E) = -\mathrm{i}h. \tag{1.4}$$

C'est sous la forme (1.4) qu'apparaissent habituellement en physique les relations de commutation canoniques. En théorie des représentations, il est plus naturel de considérer la représentation équivalente à π_h agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ obtenue par le changement d'échelle $\varphi \mapsto \varphi^\dagger(\cdot) = h^{1/2}\varphi(h\cdot)$. Les formules sont:

$$\pi_h^\dagger(\exp(xP + yQ + zE))\varphi^\dagger(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h(z+xy/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}huy}\varphi^\dagger(u - x). \tag{1.5}$$

La représentation infinitésimale correspondante de $\mathfrak{g}_0$, notée $\pi_h^\dagger$ est donnée par les relations:

$$\pi_h^\dagger(P) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}, \qquad \pi_h^\dagger(Q) = \mathrm{i}hu, \qquad \pi_h^\dagger(E) = -\mathrm{i}h. \tag{1.6}$$

Par transformation de Fourier, on obtient un autre modèle de la même classe de représentations. Les formules sont:

$$\hat{\pi}_h(\exp(xP + yQ + zE))\hat{\varphi}(u) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}h(z-xy/2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hux}\hat{\varphi}(u - y). \tag{1.7}$$

La représentation infinitésimale correspondante de $\mathfrak{g}_0$, notée $\hat{\pi}_h$ est donnée par les relations:

$$\hat{\pi}_h(P) = -\mathrm{i}hu, \qquad \hat{\pi}_h(Q) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}, \qquad \hat{\pi}_h(E) = -\mathrm{i}h. \tag{1.8}$$

La théorie des opérateurs pseudo-différentiels classiques sur $L^2(\mathbb{R})$ s'interprète de façon é légante en termes de la représentation $\hat{\pi}_h$: soit p un symbole défini sur $\mathfrak{g}_0^*$, dont la transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}p$ est à support compact sur $\mathfrak{g}_0$. L'opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl p au sens de [An] défini par la formule:

$$p^{W.\hat{\pi}_h}(\hat{\varphi}) = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p(A)\hat{\pi}_h(\exp(A))\hat{\varphi}\,\mathrm{d}A \tag{1.9}$$

n'est autre que l'opérateur h-pseudo-différentiel [Ro,MN] dont le symbole de Weyl est

$$p^*(x,\xi,h) = p(hE^* + \xi P^* - xQ^*). \tag{1.10}$$

L'interprétation géométrique est la suivante. La représentation π_h est associée par la méthode des orbites à l'orbite co-adjointe de $f = hE^*$ dans $\mathfrak{g}^*$: $\Omega_h = \{hE^* + \alpha P^* + \beta Q^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. En général, une orbite co-adjointe est toujours une variété symplectique. On choisit une polarisation $\mathfrak{h}$ (par exemple $\mathfrak{h} = \mathbb{R}P + \mathbb{R}E$) qui définit un feuilletage lagrangien de Ω_h (les feuilles sont les images des $gH = g\exp(\mathfrak{h})$ dans Ω_h identifié à $G/G(f)$, l'espace des feuilles est G/H). L'espace $L^2(\mathbb{R})$ de la représentation s'identifie à l'ensemble des sections L^2 d'un fibré en droites sur l'espace G/H, et l'orbite co-adjointe Ω_h s'identifie au cotangent de G/H. Donc l'espace des phases naturel pour le calcul pseudo-différentiel sur $L^2(\mathbb{R})$ est Ω_h, ce qui est conforme à la formule (1.10).

Notons qu'en faisant varier $h \neq 0$, les symboles sont définis sur $\mathfrak{g}_0^*$ privé d'un plan $h = 0$. La limite semi-classique consiste à regarder de qui se passe lorsque $h \to 0$.

Dans le présent travail, nous cherchons à définir un formalisme analogue pour les opérateurs aux différences finies sur un réseau. Que deviennent les relations de commutation (1.1) lorsqu'on se place sur un réseau au lieu de se placer sur $\mathbb{R}$? Que se passe-t-il en outre quand la maille du réseau tend vers zéro? Nous examinons ce problème en détail: on se place sur $\delta(\mathbb{Z}+\lambda)$ avec $\delta > 0$ et $\lambda \in [0, 1[$, on fixe une constante (constante de Planck) non nulle h et on considére les deux opérateurs:

$$D_\delta f(x) = \frac{1}{\delta}(f(x+\delta) - f(x)), \qquad \mathbf{x}\cdot f(x) = xf(x) \tag{1.11}$$

La relation de commutation s'écrit ici:

$$[D_\delta, \mathbf{x}] = (\mathrm{Id} + \delta D_\delta). \tag{1.12}$$

L'opérateur $-i$ est essentiellement anti-autoadjoint (non borné) dans $L^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$, mais pas D_δ, dont l'adjoint est $-D_{-\delta}$. Posant:

$$\begin{aligned} &p = -ih\mathbf{x}, \qquad q = -\tfrac{1}{2}(D_\delta + D_{-\delta}),\\ &e = -\tfrac{1}{2}\mathrm{i}h\delta(D_\delta - D_{-\delta}) - \mathrm{i}h\mathrm{Id}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &pf(x) = -\mathrm{i}hf(x), \qquad qf(x) = -\frac{1}{2\delta}(f(x+\delta) - f(x-\delta)),\\ &ef(x) = -\frac{\mathrm{i}h}{2}(f(x+\delta) + f(x-\delta)) \end{aligned} \tag{1.14}$$

on obtient alors trois opérateurs essentiellement anti-autoadjoints vérifiant les relations:

$$[p,q] = e, \qquad [p,e] = -(h\delta)^2 q, \qquad [q,e] = 0. \tag{1.15}$$

On remarque que, quand $\delta \to 0$, les formules (1.14) "tendent" vers les formules (1.8). Les formules (1.13) définissent par exponentiation une représentation unitaire irréductible $\hat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}$ du groupe de Lie $\tilde{G}_\alpha$ connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ engendrée par les éléments P, Q, E avec les relations:

$$[P,Q]=E, \qquad [P,E]=-\alpha^2 Q, \qquad [Q,E]=0 \tag{1.16}$$

avec $\alpha = h\delta$. Ce groupe joue donc le rôle que joue le groupe de Heisenberg dans le cas continu. Mais contrairement au groupe de Heisenberg, il n'est pas nilpotent,mais seulement résoluble pour $\alpha \neq 0$. Pour tout α (ou δ) non nul, il est isomorphe au revêtement universel du groupe des déplacements du plan. On considère aussi un groupe quotient de $\tilde{G}_\alpha$, G_α isomorphe au groupe des déplacements du plan. La représentation $\hat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}$ définit par passage au quotient une représentation de G_α si et seulement si $\lambda = 0$. Dans ce cas, on note $\hat{\pi}_\delta$ la représentation de G_α ainsi définie.

On peut donc appliquer à $\tilde{G}_\alpha$ ou G_α le calcul pseudo-différentiel défini par la formule (1.9), qui s'applique à des groupes de Lie généraux par [Ma3].

Au lieu de considérer les fonctions définies sur des réseaux, cela revient au même, par transformation de Fourier, de s'intéresser aux fonctions pseudo-périodiques, c'est-à-dire à l'ensemble $\mathcal{H}_{\delta,\lambda}$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}/2\pi\delta^{-1}\mathbb{Z}$ et vérifiant

$$\psi(\theta + 2\pi n\delta^{-1}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\lambda}\psi(\theta).$$

C'est le plus souvent dans ce contexte (des fonctions périodiques, ce qui correspond à $\lambda = 0$, ou plus généralement pseudo-périodiques) que sont introduits des procédés de calcul pseudo-différentiel adaptés.

Dans la première partie de cet article (Section 2) nous appliquons la méthode des orbites pour décrire explicitement certaines classes de représentations unitaires irréductibles de $\tilde{G}_\alpha$. Les représentations $\hat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}$, qui sont à équivalence près les seules représentations unitaires irréductibles de dimension infinie de $\tilde{G}_\alpha$, sont associées à des orbites $\Omega^{h\delta}_{\delta}$ de dimension 2, qui sont des cylindres à base elliptique. A une orbite $\Omega^{h\delta}_{\delta}$ sont associées une infinité de représentations de $\tilde{G}_\alpha$, une pour chaque $\lambda \in [0, 1[$, mais seulement une de G_α.

Comme nous nous intéressons à la limite lorsque $\alpha \to 0$, il est commode de considérer $\tilde{G}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_\alpha$) comme un groupe de Lie (resp. une algèbre de Lie) variable [L-L,Do]: on considère que les générateurs P, Q, E forment une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sous-jacent à toutes les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$. Le dual $\mathfrak{g}^*$, muni de la base duale P^*, Q^*, E^*, se décompose sous l'action coadjointe de $\tilde{G}_\alpha$ en orbites coadjointes variables suivant le paramètre α.

Lorsque δ s'annule l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha = \mathcal{G}_{h\delta} = \mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie de Heisenberg, comme on pouvait s'y attendre. En revanche il est pertinent de prendre comme groupe G_0 une extension de degré 2 du groupe de Heisenberg G: en effet l'orbite coadjointe $\Omega^{h\delta}_{\delta}$ tend dans $\mathfrak{g}^*$ vers la réunion des deux plans de cote $\pm h$ lorsque δ tend vers 0, qui est une orbite coadjointe $\tilde{\Omega}_h$ pour G_0.

Au niveau des représentations, la représentation $\hat{\pi}^{h\delta}_{\delta}$ converge, pour la topologie de Fell, vers la représentation $\tilde{\pi}_h$ de G_0 associée à Ω_h. La restriction de $\tilde{\pi}_h$ à G est la somme directe $\hat{\pi}_h \oplus \hat{\pi}_{-h}$ de deux représentations unitaires irréductibles du groupe de Heisenberg, l'élément ε d'ordre 2 permutant simplement les deux copies de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans le Section 3 nous rappelons le calcul pseudo-différentiel de [Ma3] qui permet d'associer à une représentation unitaire π d'un groupe de Lie G et à un symbole p sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie de G un opérateur pseudo-différentiel $p^{W,\pi}$ de symbole de Weyl p agissant sur l'espace de la représentation π. Nous montrons comment relier ce formalisme au calcul h-pseudo-différentiel sur $\mathbb{R}$ en prenant pour groupe de Lie G le groupe de Heisenberg de dimension 3. Dans le cas du groupe G_α(ou $\tilde{G}_\alpha$), nous obtenons un calcul pseudo-différentiel pour les opérateurs aux différences finies (ou, par transformation de Fourier, pour les opérateurs différentiels agissant sur les fonctions pseudo-périodiques). Pour ce calcul pseudo-différentiel, les symboles sont essentiellement définis sur les orbites co-adjointes, qui sont des cylindres. Le calcul ainsi obtenu a de bonnes propriétés de covariance, et devrait avoir d'autres applications.

Dans le Section 4 nous montrons que l'opérateur pseudo-différentiel $p^{W,\hat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ converge vers $p^{W,\hat{\pi}_h}$ fortement au sens généralisé de Kato lorsque $\delta \to 0$ (Théorème 4.3). Cela suppose que l'on puisse considérer les opérateurs $p^{W,\hat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ comme agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ pour tout δ, λ. Pour ce faire on utilise une *analyse toutes résolutions infiniment régulière*, c'est à dire une famille d'injections isométriques:

$$\iota_{\delta,\lambda} : l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda)) \to L^2(\mathbb{R})$$

qui commutent aux dilatations et translations, qui vérifient pour tout δ, λ:

$$\begin{aligned} &\iota_{\delta,\lambda}(l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))) \subset \iota_{\delta',\lambda'}(l^2(\delta'(\mathbb{Z}+\lambda'))), \\ &\text{dès que } \delta(\mathbb{Z}+\lambda) \subset \delta'(\mathbb{Z}+\lambda'), \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \iota_{2^{-n}\delta,\, 2^n\lambda}(l^2(2^{-n}\delta(\mathbb{Z}+2^n\lambda))) = \{0\}, \tag{1.18}$$

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \iota_{2^{-n}\delta,\, 2^n\lambda}(\ell^2(2^{-n}\delta(\mathbb{Z}+2^n\lambda)))} = L^2(\mathbb{R}) \tag{1.19}$$

et qui envoient les suites à décroissance rapide dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On construit un tel objet en adaptant la construction de l'analyse multi-résolution de Littlewood–Paley [Me, Sections II.2, II.12]. Pour construire des injections isométriques dans deux copies de $L^2(\mathbb{R})$ il suffit alors d'identifier de manière naturelle l'espace $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ à deux copies de $l^2(2\delta(\mathbb{Z}+\lambda\frac{1}{2}))$.

Nous faisons au Section 4.4 une digression sur les ondelettes en indiquant une méthode, à notre connaissance nouvelle, de construction de la mère des ondelettes.

Dans la dernière partie (Section 5) nous appliquons le Théorème 4.3 à la théorie spectrale des opérateurs pseudo-différentiels: si le symbole p est à valeurs réelles et est elliptique dans la direction de toutes les orbites coadjointes, les opérateurs $p^{W,\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ et $P^{W,\pi_h} \oplus p^{W,\pi_{-h}}$ sont essentiellement auto-adjoints, ont une résolvante compacte et ont un spectre discret borné à gauche [Ma4]. Si $N_{\delta,\lambda}(t)$ (resp. $N_0^{\pm}(t)$) désigne le nombre de valeurs propres de l'opérateur $p^{W,\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ strictement inférieures à t on a pour δ petit: (Théorème 5.1)

$$N_{\delta,\lambda}(t) \geq N_0^+(t) + N_0^-(t) \tag{1.20}$$

et nous pensons (Conjecture 5.2) que cette minoration peut être remplacée par une équivalence. Enfin nous montrons la validité de cette conjecture sur un exemple.

Notre travail a un rapport étroit avec la théorie quantique des champs [GJ, pages 182 et suivantes], où la question de l'approximation d'une situation continue par une situation discrète est abordée. L'avantage que notre approche pourrait représenter est que nous considérons d'emblée des opérateurs opérant sur le réseau tout entier, alors que [GJ] considère un domaine borné dans le réseau, puis passe à la limite thermodynamique.

D'autre part, plusieurs auteurs, notamment de Bièvre, Dooley [BG,Do,DR] ont investigué les rapports entre quantification et déformations d'algèbres de Lie. A notre connaissance, ni le cas présent (le groupe de Heisenberg comme limite du groupe des déformations du plan), ni la méthode (le calcul symbolique de Weyl sur les groupes de Lie) n'avaient été considérés auparavant.

2. Représentations

2.1. La méthode des orbites pour le groupe des déplacements elliptiques du plan

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ engendrée par les trois générateurs P_α, Q_α, E_α avec les relations:

$$[P_\alpha, Q_\alpha] = E_\alpha, \qquad [P_\alpha, E_\alpha] = -\alpha^2 Q_\alpha, \qquad [E_\alpha, Q_\alpha] = 0. \tag{2.1}$$

Pour $\alpha \neq 0$, cette algèbre de Lie est celle du groupe $\tilde{G}_\alpha = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ avec le produit

$$(\theta, v) \cdot (\theta', v') = (\theta + \theta', v + k_\alpha(\theta)(v'))$$

où

$$k_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha\theta) & -\alpha \sin(\alpha\theta) \\ \alpha^{-1} \sin(\alpha\theta) & \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix}.$$

Le groupe $\tilde{G}_\alpha$ est le revêtement simplement connexe du groupe $G_\alpha = \mathbb{R}/2\pi\alpha^{-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ muni de la loi ($\dot{\theta}$ désigne la classe de θ):

$$(\dot{\theta}, v) \cdot (\dot{\theta}', v') = (\theta \dot{+} \theta', v + k_\alpha(\theta)(v')$$

où $k_\alpha(\dot{\theta}) = k_\alpha(\theta)$. Pour $\alpha = 1$, G_α est le groupe des déplacements du plan. Pour $\alpha \neq 0$ quelconque, G_α est le groupe des déplacements associés à la structure euclidienne définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$||(v_1, v_2)||^2 = v_1^2 + \alpha^2 v_2^2.$$

C'est pourquoi on l'appelle groupe des déplacements elliptiques du plan. Dans tous les cas $\alpha \neq 0$, $\tilde{G}_\alpha$ et G_α sont des groupes résolubles non-exponentiels (c'est-à-dire pour lesquels l'exponentielle n'est pas surjective [BCD]).

Pour $\alpha = 0$, l'algèbre $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{n}_3$ de dimension 3. Dans la suite, l'utilisation des notations $\mathfrak{g}_\alpha$, G_α, $\tilde{G}_\alpha$ sera réservée implicitement aux cas $\alpha \neq 0$.

La méthode des orbites s'applique pour la détermination des représentations unitaires irréductibles de $\tilde{G}_\alpha$ et G_α [BCD, Chap. VIII]: les représentations unitaires sont associées aux orbites co-adjointes de $\tilde{G}_\alpha$. Il nous sera utile, pour comprendre le détail de la déformation $\alpha \to 0$ de donner les résultats des calculs de façon détaillée.

Calcul des orbites coadjointes. On les donne pour G_α: les orbites pour le revêtement sont les mêmes. Dans la base $(P_\alpha, Q_\alpha, E_\alpha)$, la matrice de la représentation adjointe de G_α dans $\mathfrak{g}_\alpha$, Ad g pour $g = (\theta, v) = (\theta, y, z) \in G_\alpha$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha^2 z & \cos(\alpha\theta) & -\alpha\sin(\alpha\theta) \\ -y & \alpha^{-1}\sin(\alpha\theta) & \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la matrice de la représentation coadjointe $\mathrm{Ad}^* g$ dans $\mathfrak{g}_\alpha^*$ dans la base duale P_α^*, Q_α^*, E_α^* est:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha\sin(\alpha\theta)y - \alpha^2\cos(\alpha\theta)z & \cos(\alpha\theta)y + \alpha\sin(\alpha\theta)z \\ 0 & \cos(\alpha\theta) & -\alpha^{-1}\sin(\alpha\theta) \\ 0 & \alpha\sin(\alpha\theta) & \cos(\alpha\theta) \end{pmatrix}.$$

Les orbites coadjointes de G_α dans $\mathfrak{g}_\alpha^*$ sont donc de deux types:
- les orbites ponctuelles ξP_α^*;
- les orbites non-dénégérées $\Omega_\delta^\alpha (\delta > 0)$, qui sont des cylindres d'axe P_α^* et de base dans le plan Q_α^*, E_α^* les ellipses de centre 0 de demi-axes $\delta^{-1} Q_\alpha^*$ et $\alpha\delta^{-1} E_\alpha^*$.

Représentations. Nous n'aurons pas besoin ici des représentations associées aux orbites ponctuelles: ce sont des caractères unitaires de $\tilde{G}_\alpha$. Soit maintenant $f = f_\delta^\alpha = \alpha\delta^{-1} E_\alpha^* \in \Omega_\delta^\alpha$. Son stabilisateur $\tilde{G}_\alpha(f)$ dans $\tilde{G}_\alpha$ est $\{(2n\pi\alpha^{-1}, 0, z), n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{R}\}$. L'algèbre de Lie de $\tilde{G}_\alpha$ est $\mathfrak{g}_\alpha(f) = \mathbb{R}E_\alpha$. Considérons un carectère χ de $\tilde{G}_\alpha(f)$ dont la restriction à la composante connexe neutre $\tilde{G}_\alpha(f)^0$ est donnée par:

$$\exp(zE_\alpha) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\delta^{-1}z}.$$

Un tel caractère χ est de la forme:

$$(2\pi n\alpha^{-1}, 0, z) \mapsto \chi_{\delta,\lambda}^\alpha(2\pi n\alpha^{-1}, 0, z) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} n\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\delta^{-1}z}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On choisit une polarisation $\mathfrak{h}_\alpha$ (c'est-à-dire une sous algèbre de $\mathfrak{g}_\alpha$ qui soit aussi un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}_\alpha (X, Y) \mapsto f([X, Y])$) stable sous $\tilde{G}_\alpha(f)$:

$$\mathfrak{h}_\alpha = \mathbb{R}Q_\alpha + \mathbb{R}E_\alpha.$$

Le sous-groupe connexe $\tilde{H}_\alpha$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_\alpha$ est fermé. La représentation $\pi(f_\delta^\alpha, \chi_{\delta,\lambda}^\alpha, \mathfrak{h}_\alpha)$ est la représentation induite à partir du caractère χ étendu à $\tilde{G}_\alpha(f)\tilde{H}_\alpha$ par:

$$(2\pi n\alpha^{-1}, y, z) \mapsto \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n\lambda}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\delta^{-1}y}.$$

On sait que cette représentation ne dépend pas, à équivalence près, de la polarisation $\mathfrak{h}_\alpha$. On note donc ${}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha = \pi(f_\delta^\alpha, \chi_{\delta,\lambda}^\alpha)$ sa classe d'équivalence.

On identifie naturellement l'espace de la représentation induite à l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ vérifiant la règle de transformation:

$$\phi(\theta + 2\pi n\alpha^{-1}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\lambda}\phi(\theta) \tag{2.2}$$

et qui sont de carré intégrable modulo $2\pi\alpha^{-1}\mathbb{Z}$. Les formules de ${}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha$ sont:

$$\begin{aligned}
[{}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha((\theta_0, 0, 0))\psi](\theta) &= \psi(\theta - \theta_0),\\
[{}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha((0, y_0, 0))\psi](\theta) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta^{-1}\sin(\alpha\theta)y_0}\psi(\theta),\\
[{}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha((0, 0, z_0))\psi](\theta) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\delta^{-1}\cos(\alpha\theta)z_0}\psi(\theta).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

La représentation correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$, qu'on note encore $\pi_{\delta,\lambda}^\alpha$, est donnée par:

$$\begin{aligned}
[{}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha(P_\alpha)\psi](\theta) &= -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta}(\theta),\\
[{}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha(Q_\alpha)\psi](\theta) &= \mathrm{i}\delta^{-1}\sin(\alpha\theta)\psi(\theta),\\
[{}^{\dagger}\pi_{\delta,\lambda}^\alpha(E_\alpha)\psi](\theta) &= -\mathrm{i}\alpha\delta^{-1}\cos(\alpha\theta)\psi(\theta).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Il est commode d'effectuer le changement unitaire d'échelle $\phi \mapsto \tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi}(\theta) = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{1/2} \phi\left(\frac{\delta}{\alpha}\theta\right).$$

L'espace de la représentation est alors l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\delta,\lambda}$ des fonctions sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\psi(\theta + 2\pi n\delta^{-1}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\lambda}\psi(\theta)$$

et de carré intégrable modulo $2\pi\delta^{-1}\mathbb{Z}$. La représentation $\pi_{\delta,\lambda}^\alpha$ du groupe $\tilde{G}_\alpha$ dans $\mathcal{H}_{\delta,\lambda}$ est donnée par les formules:

$$\begin{aligned}
[\pi_{\delta,\lambda}^\alpha((\theta_0, 0, 0))\psi](\theta) &= \psi(\theta - \alpha\delta^{-1}\theta_0),\\
[\pi_{\delta,\lambda}^\alpha((0, y_0, 0))\psi](\theta) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta^{-1}\sin(\delta\theta)y_0}\psi(\theta),\\
[\pi_{\delta,\lambda}^\alpha((0, 0, z_0))\psi](\theta) &= \mathrm{e}^{-i\alpha\delta^{-1}\cos(\delta\theta)z_0}\psi(\theta).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

La représentation correspondante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$, qu'on note encore $\pi_{\delta,\lambda}^\alpha$, est donnée par:

$$\begin{aligned}
[\pi_{\delta,\lambda}^\alpha(P_\alpha)\psi](\theta) &= -\alpha\delta^{-1}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta}(\theta),\\
[\pi_{\delta,\lambda}^\alpha(Q_\alpha)\psi](\theta) &= \mathrm{i}\delta^{-i}\sin(\delta\theta)\psi(\theta),\\
[\pi_{\delta,\lambda}^\alpha(E_\alpha)\psi](\theta) &= -\mathrm{i}\alpha\delta^{-1}\cos(\delta\theta)\psi(\theta).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Il est utile pour nous de remplacer ce modèle pseudo-périodique par un modèle discret en exploitant la covariance des fonctions sous l'action de $\mathbb{Z}$. On identifie donc $\mathcal{H}_{\delta,\lambda}$ à $\mathcal{V}_{\delta,\lambda} = \ell^2(\delta(\lambda + \mathbb{Z}))$ par $\psi \mapsto \widehat{\psi}$ où

$$\widehat{\psi}(\delta(n+\lambda)) = \int\limits_{\mathbb{R}/2\pi\delta^{-1}\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(n+\lambda)\theta}\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

soit encore, pour $x \in \delta(\mathbb{Z} + \lambda)$:

$$\widehat{\psi}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}/2\pi\delta^{-1}\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Dans ce nouveau modèle, l'action du groupe $\tilde{G}_\alpha$ est donnée par des formules compliquées qu'il est inutile de donner ici. En revanche, l'action de l'algèbre de Lie s'écrit:

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}(P_\alpha)\widehat{\psi}(x) &= -\mathrm{i}x\alpha\delta^{-1}\widehat{\psi}(x),\\
\widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}(Q_\alpha)\widehat{\psi}(x) &= \frac{1}{2\delta}(\widehat{\psi}(x-\delta) - \widehat{\psi}(x+\delta)),\\
\widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}(E_\alpha)\widehat{\psi}(x) &= -\mathrm{i}\frac{\alpha}{2\delta}(\widehat{\psi}(x+\delta) + \widehat{\psi}(x-\delta)).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

On retrouve bien les opérateurs p, q, e de l'introduction (1.14):

$$p = \widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}(P_\alpha), \qquad q = \widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}(Q_\alpha), \qquad e = \widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}(E_\alpha).$$

Ce qui est important pour nous est que la représentation donnée par les formules (2.7) est associée, par la méthode de quantification géométrique à la variété symplectique $\tilde{G}_\alpha$-homogène Ω^α_δ.

Dans le cas du groupe G_α, les choses sont un peu plus simples: le stabilisateur $G_\alpha(f)$ est connexe – c'est l'ensemble $\{(1, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$. Il n'y a donc qu'une seule représentation associée à l'orbite Ω^α_δ, ce qui correspond au fait évident que pour $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\alpha^{-1}\mathbb{Z}$, la règle de transformation (2.2) n'a de sens que pour $\lambda = 0$. On notera π^α_δ cette représentation de G_α; c'est aussi la représentation obtenu par passage au quotient à partir de $\tilde{\pi}^\alpha_{\delta,0}$. Les formules pour la représentation de l'algèbre de Lie sont les mêmes que (2.7).

2.2. *Représentations d'une extension de degré 2 du groupe de Heisenberg*

Dans la situation "limite" $\alpha \to 0$, comme on le verra dans le paragraphe suivant, le groupe qui intervient naturellement n'est pas le groupe de Heisenberg de dimension 3, mais une extension de degré 2. Soit G le groupe de Heisenberg de dimension 3, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ engendrée par P_0, Q_0, E_0 avec la relation

$$[P_0, Q_0] = E_0.$$

Les orbites co-adjointes de G dans $\mathfrak{g}_0^*$ sont de deux types:
– orbites ponctuelles: $\Omega_{\xi,\nu} = \Omega_{\xi P_0^* + \nu Q_0^*} = \{\xi P_0^* + \nu Q_0^*\}$;

– orbites régulières : $\Omega_h = \Omega_{hE^*} = \{hE_0^* + \lambda P_0^* + \mu Q_0^*, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Les représentations correspondantes sont:

– pour l'orbite $\Omega_{\xi,\nu}$, la représentation de dimension 1: $\pi_{[\xi,\nu]}$ définie par:

$$\pi_{[\xi,\nu]}(\exp(xP_0 + yQ_0 + zE_0)) = e^{-i\xi x - i\nu y};$$

– pour l'orbite Ω_h, la représentation de Schrödinger π_h, agissant dans $L^2(\mathbb{R})$, définie par les formules (1.5) et (1.6). On choisit $f_h^0 = hE^* \in \Omega_h$, et la polarisation $\mathfrak{h} = \mathbb{R}Q + \mathbb{R}E$. La représentation $\pi(f_h^0, \mathfrak{h})$ est la représentation π_h.

Soit G_0 l'extension de G [2] par le groupe à deux éléments:

$$G_0 = \{(\varepsilon, g), \varepsilon \in \{-1, 1\}, g \in G\}.$$

avec la loi

$$(\varepsilon, g) \cdot (\varepsilon', g') = (\varepsilon\varepsilon', g\varepsilon(g'))$$

où l'action de $\{-1, 1\}$ sur G est définie par:

$$(-1)[\exp(xP + yQ + zE)] = \exp(xP - yQ - zE)).$$

La méthode des orbites s'applique sans difficultés au groupe non-connexe G_0. Les orbites co-adjointes sont:

– orbites réduites à un point $\tilde{\Omega}_{\xi,\xi} = \{\xi(P^* + Q^*)\}(\xi \in \mathbb{R})$;
– orbites à deux points $\tilde{\Omega}_{\xi,\nu} = \{\xi P^* + \nu Q^*, \nu P^* + \xi Q^*\}$ $(\xi \neq \nu \in \mathbb{R})$;
– orbites régulières $\tilde{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Omega_{-h} (h \neq 0 \in \mathbb{R})$.

Les représentations correspondantes sont respectivement:

– pour l'orbite $\tilde{\Omega}_{\xi,\xi}$: il y a deux représentations, associées aux deux caractères de $\{+1, -1\}$:

$$\tilde{\pi}_{[\xi,\xi]}(\varepsilon, g) = \chi(\varepsilon)\pi_{[\xi,\xi]}(g)$$

pour χ un caractère de $\{+1, -1\}$;

– pour l'orbite $\tilde{\Omega}_{\xi,\nu}$: $\tilde{\pi}_{[\xi,\nu]}$ est une représentation de dimension 2; sa restriction à G est la somme des deux caractères $\pi_{[\xi,\nu]}$ et $\pi_{[\nu,\xi]}$, l'élément $(-1, e)$ permutant les deux facteurs;
– pour l'orbite $\tilde{\Omega}_h$, la représentation $\tilde{\pi}_h$ agit dans $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$; restriction à G est la somme directe $\widehat{\pi}_h \oplus \widehat{\pi}_{-h}$, et l'élément $(-1, e)$ permute les deux facteurs. [3]

On définit encore $\tilde{G}_0$ comme le produit direct de G_0 par $\mathbb{Z}$. Les représentations irréductibles de $\tilde{G}_0$ sont obtenues à partir de celles de G_0 par multiplication par un caractère de $\mathbb{Z}$. Les orbites co-adjointes pour $\tilde{G}_0$ sont les mêmes que pour G_0. A l'orbite $\tilde{\Omega}_h$ sont associées une infinité de représentations : pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, la représentation $\pi_{h,\lambda}$ définie par

$$\tilde{\pi}_{h,\lambda}(m, g) = e^{2i\pi\lambda m}\tilde{\pi}_h(g).$$

Un modèle de $\pi_{h,\lambda}$ est la représentation induite à partir des données : f_h^0, $\mathfrak{h}$, et le caractère $\chi(\lambda, h)$ de $\tilde{G}_0(f_h^0)$ défini par h et λ.

---

[2] Cette notation est maladroite, puisque G est la composante connexe neutre de G_0, mais elle est cohérente avec nos choix par ailleurs.

[3] Par cohérence, on choisit le modèle $\widehat{\pi}_h$ de la représentation π_h.

2.3. Déformations: premier point de vue

On considère l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{g}_0$. On le note $\mathfrak{g}$. Il est muni de la base P, Q, E. On note $[\ ,\ ]_0$ le crochet de Lie:

$$[P, Q]_0 = E, \qquad [P, E]_0 = [Q, E]_0 = 0.$$

Muni du crochet $[\ ,\ ]_0$, $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_0$. On note $[\ ,\ ]_1$ le crochet de Lie défini par:

$$[P, Q]_1 = E, \qquad [P, E]_1 = -Q, \qquad [E, Q]_1 = 0. \tag{2.8}$$

$\mathfrak{g}$, muni du crochet $[\ ,\ ]_1$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$. Considérons maintenant l'automorphisme Φ_α de $\mathfrak{g}$:

$$\Phi_\alpha(P) = \alpha P, \qquad \Phi_\alpha(Q) = \alpha(Q), \qquad \Phi_\alpha(E) = \alpha^2 E.$$

On définit le crochet $[\ ,\ ]_\alpha$ par:

$$[X, Y]_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}([\Phi_\alpha(X), \Phi_\alpha(Y)]_1).$$

On vérifie immédiatement que $\mathfrak{g}$ muni du crochet $[\ ,\ ]_\alpha$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_\alpha$ et que

$$\lim_{\alpha\to 0} [X, Y]_\alpha = [X, Y]_0.$$

L'algèbre $\mathfrak{g}_0$ est donc une contraction de $\mathfrak{g}_1$, ou encore $\mathfrak{g}_1$, et plus généralement $\mathfrak{g}_\alpha$ est une déformation de $\mathfrak{g}_0$ ([Do], voir aussi [CdB]). Les déformations ont été utilisées par Dooley–Rice, Cishahayo–de Bièvre, etc. dans divers contextes – mais pas semble-t-il pour relier représentations du groupe des déplacements du plan et représentations du groupe de Heisenberg.

Dans le contexte des déformations, les orbites co-adjointes pour les divers groupes rencontrés sont toutes incluses dans un espace vectoriel fixe – le dual $\mathfrak{g}^*$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sous-jacent à toutes les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ et à $\mathfrak{g}_0$. On a alors:

Proposition 2.1. *Lorsque $\delta \to 0$, $\Omega_\delta^{h\delta} \to \tilde{\Omega}_h$ pour la topologie de Hausdorff sur les fermés de $\mathfrak{g}^*$.*

Démonstration. La topologie de Hausdorff étant métrisable, il suffit de démontrer que pour toute suite $\delta_n \neq 0$ tendant vers 0, $\tilde{\Omega}_h$ est l'ensemble des limites des suites convergentes ψ_n avec $\psi_n \in \Omega_{\delta_n}^{h\delta_n}$. Comme $\tilde{\Omega}_h$ et $\Omega_\delta^{h\delta}$ sont invariants par les translations d'axe P^*, il suffit de regarder ce qui se passe dans le plan d'axes Q^* et E^*. Les points $\pm hE^*$ sont dans $\Omega_\delta^{h\delta}$ pour tout δ. Un point de l'orbite est de la forme $\psi_n = -(h\delta_n)^{-1}\sin(h\delta_n\theta_n)Q^* + \cos(h\delta_n\theta_n)E^*$. Pour que ψ_n admette une limite, il faut que $\sin(h\delta_n\theta_n) \to 0$, donc $\cos(h\delta_n\theta_n) \to \pm 1$. La limite est donc nécessairement dans l'une des deux droites parallèles à Q^* passant par $\pm hE^*$. La réciproque est immédiate. □

2.4. Déformations: deuxième point de vue

Au moins dans le cas particulier qui nous occupe, plutôt que regarder une structure d'algèbre de Lie variable, on peut considérer un groupe fixe dans lequel tous les groupes G_α se plongent.

Soit $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie produit semi-direct de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ par $\mathbb{R}^2$ pour l'action naturelle de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ a donc cinq générateurs X, Y, H, P, Q: X, Y, H sont les générateurs usuels de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, et Q, E la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a les relations suivantes (on n'écrit que les relations non nulles).

$$\begin{aligned} &[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \\ &[H, Q] = Q, \quad [H, E] = -E, \quad [X, E] = Q, \quad [Y, Q] = -E. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Posons $P_\alpha = Y - \alpha^2 X$, $Q_\alpha = Q$, $E_\alpha = E$. Alors l'espace engendré par P_α, Q_α, E_α est une sous-algèbre de Lie, isomorphe à $\mathfrak{g}_\alpha$ (voir les relations (2.1)), et qu'on note aussi $\mathfrak{g}_\alpha$.

Le groupe G_α s'identifie à un sous-groupe du produit semi-direct $M = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ (où $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ agit dans $\mathbb{R}^2$ par l'action usuelle), et $\tilde{G}_\alpha$ se plonge dans le produit semi-direct $\widetilde{M} = \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ où $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ désigne le revêtement simplement connexe universel de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$.

Pour $\alpha = 0$, la sous-algèbre engendrée par $P = Y$, Q, E est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{g}_0$. On la note $\mathfrak{g}_0$. On identifie le groupe G au sous-groupe connexe de M d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$: c'est l'ensemble des éléments de M de la forme

$$(g, v), \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

avec $x \in \mathbb{R}$. Le groupe engendré par G et $(-I, 0) \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$($I$ la matrice identité.) s'identifie à G_0; Enfin, on identifie $\widetilde{G}_0$ à l'image réciproque de G_0 dans le revêtement $\widetilde{M}$.

On peut maintenant utiliser des arguments topologiques. On munit d'abord l'ensemble $\mathbf{GR}(\mathfrak{m})$ des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{m}$ de la topologie réunion disjointe des topologies usuelles sur les ensembles $\mathbf{GR}_d(\mathfrak{m})$ des sous-espaces vectoriels de dimension d (voir [A]). $\mathbf{GR}(\mathfrak{m})$ est compact métrisable. On munit ensuite l'ensemble $\mathbf{AL}(\mathfrak{m})$ des algèbres de Lie de sous-groupes fermés de M de la topologie induite par celle de $\mathbf{GR}(\mathfrak{m})$. Le lemme suivant est évident.

Lemme 2.2. *Pour la topologie sur $AL(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{g}_\alpha \to \mathfrak{g}_0$ quand $\alpha \to 0$.*

On munit maintenant l'ensemble $\mathcal{K}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathcal{K}(M)}$) des sous-groupes fermés de M (resp. $\widetilde{M}$) de la topologie induite par la topologie de Hausdorff sur l'ensemble des fermés de M (resp. $\widetilde{M}$). Comme M (resp. $\widetilde{M}$) est séparable, $\mathcal{K}(M)$ (resp. $\mathcal{K}(\widetilde{M})$) est métrisable compact [A, Lemme 47].

Lemme 2.3. *Pour la topologie sur $\mathcal{K}(M)$ (resp. $\mathcal{K}(\widetilde{M})$), $G_\alpha \to G_0$ (resp. $\tilde{G}_\alpha \to \tilde{G}_0$).*

Démonstration. Pour M, la démonstration est très analogue à celle de la proposition 2.1. Pour $\widetilde{M}$, on prend d'abord l'image dans M, on se sert du résultat pour M, puis on utilise la propriété de revêtement. □

Enfin, on munit l'ensemble $\mathcal{S}(M)$ (resp. $\widetilde{\mathcal{S}(M)}$) des couples (H, τ), où H est un sous-groupe fermé de M et τ est une classe d'équivalence de représentations unitaires de H, de la topologie de Fell (cf. [Fe,A]). Cette topologie n'est pas métrisable.

Proposition 2.4. *Pour la topologie sur $\mathcal{S}(M)$ (resp. $\mathcal{S}(\tilde{M})$), $(G_\alpha, \pi^\alpha_{\delta,\lambda}) \to (G_0, \tilde{\pi}_h)$ et $(\tilde{G}_\alpha, \pi^\alpha_{\delta,\lambda}) \to (\tilde{G}_0, \tilde{\pi}_{h,\lambda})$.*

Démonstration. On choisit comme modèle de $\pi^\alpha_{\delta,\lambda}$ la représentation $\pi(f^\alpha_\delta, \chi^\alpha_{\delta\lambda}, \mathfrak{h}_\alpha)$. Lorsque $\alpha \to 0$, $\mathfrak{h}_\alpha \to \mathfrak{h}_0$, $\tilde{H}_\alpha \to \exp \mathfrak{h}$, et pour la topologie de Fell le couple $(\tilde{G}_\alpha(f^\alpha_\delta)\tilde{H}_\alpha, \chi^\alpha_{\delta\lambda})$. tends vers $(\tilde{G}_0(f^0_h), \chi(h, d))$. Le théorème de continuité de l'induction permet de conclure immédiatement. □

Remarque. Au niveau des formules, le résultat précédent se manifeste par le fait que les formules (2.4) "tendent" vers les formules (1.6) lorsque $\alpha \to 0$. Les formules (2.7) "tendent" vers les formules (1.8) – ce qui n'est pas surprenant puisque le passage de (1.6) à (1.8), qui correspond à un changement de polarisation, se fait par transformation de Fourier, comme le passage de (2.4) à (2.7).

2.5. *Un automorphisme intérieur d'ordre deux*

On reprend les notations du paragraphe 2.3. L'involution linéaire σ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par:

$$\sigma(P) = P, \qquad \sigma(Q) = -Q, \qquad \sigma(E) = -E,$$

est un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\alpha$ pour tout α, nul ou non. Dans tous les cas $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$, cet automorphisme est donné par l'action adjointe d'un élément de $\tilde{G}_\alpha$:

$$j_\alpha = \exp\left(\frac{\pi}{\alpha}P\right) \in \tilde{G}_\alpha \quad (\alpha \neq 0),$$
$$j_0 = (0, -1, e) \in \tilde{G}_0.$$

Dans le cas $\alpha \neq 0$, on a, pour tout h, δ tels que $h\delta = \alpha$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et pour tout $\phi \in \mathcal{V}_{\delta,\lambda}$:

$$\widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}(j_\alpha)\phi(\delta(n+\lambda)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\lambda}(-1)^n\phi(\delta(n+\lambda)).$$

Dans le cas $\alpha = 0$, pour tout $h \neq 0$, l'élément $\tilde{\pi}_h(j_0)$ est la permutation des deux facteurs $L^2(\mathbb{R})$.

3. Opérateurs pseudo-différentiels à symbole défini sur le dual d'une algèbre de Lie

Nous utilisons le calcul pseudo-différentiel défini dans [Ma1,Ma2,Ma3,Ma4]. Soit π une représentation unitaire d'un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et p une fonction définie sur le dual $\mathfrak{g}^*$, telle que sa transformée de Fourier inverse soit de classe C^∞ à support compact dans $\mathfrak{g}$. L'opérateur $p^{W,\pi}$ de symbole de Weyl p dans l'espace de la représentation π est défini par la formule:

$$p^{W,\pi}(u) = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1} p(x)\pi(\exp x)u \, \mathrm{d}x \tag{3.1}$$

pour tout u dans l'espace de la représentation π ($\mathrm{d}x$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$). Si de plus u est un vecteur C^∞ de la représentation, on peut donner un sens à la formule ci-dessus, grâce à des intégrations par parties judicieuses, *pour toute fonction p à croissance modérée dont la transformée de Fourier inverse est à support compact*: en effet si Δ désigne le laplacien sur $\mathfrak{g}$ (muni d'une structure euclidienne quelconque), et si Λ désigne la fonction sur $\mathfrak{g}^*$ définie par:

$$\Lambda(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{1/2}$$

il suffit de poser:

$$p^{W,\pi}u = \int_{\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}(\Lambda^{-2s} p)(y)(1-\Delta)^s \pi(\exp y)u \, \mathrm{d}y \tag{3.2}$$

pour un entier s assez grand. L'opérateur $p^{W,\pi}$ a donc un sens comme opérateur non borné sur l'espace de la représentation. On vérifie par ailleurs sans peine la relation de covariance:

$$(\mathrm{Ad}^* g \cdot p)^{W,\pi} = \pi(g) \circ p^{W,\pi} \circ \pi(g^{-1}). \tag{3.3}$$

Il est possible de définir un calcul symbolique (c'est-à-dire de trouver un symbole pour le composé de tels opérateurs) si l'on se restreint à certaines classes de symboles; on définit la classe $AS_\rho^{m,k}(\mathfrak{g}^*)$ comme étant l'espace des fonctions p de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ et qui vérifient:

$$|D^\alpha p(\xi)| \le C\beta(1 + \|\xi\|^2)^{k(m-\rho|\beta|)}$$

pour tout multi-indice β et dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}^{-1}p$ est à support compact inclus dans un voisinage compact K de l'origine suffisamment petit (m est un réel quelconque et ρ appartient à $]1/2,1]$). Si $\rho \in AS_\rho^{m_1,K}$ et $q \in AS_\rho^{m_2,K}$, alors il existe un compact K dans $\mathfrak{g}^*$ et un symbole $p\#q \in AS_\rho^{m_1+m_2,K}$ tel que, pour toute représentation unitaire π de G on ait:

$$(p\#q)^{W,\pi} = p^{W,\pi} \circ q^{W,\pi}.$$

Le produit est donné par la formule intégrale

$$p\#q(\xi) = \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}(p)(x)\mathcal{F}^{-1}(q)(y)\mathrm{e}^{\langle x\cdot y,\xi\rangle} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

où $x \cdot y = \log(\exp x \exp y)$ est donné par la formule de Campbell–Hausdorff. On a un développement asymptotique

$$p\#q \sim \sum_{n \geq 0} C_n(p, q)$$

où:

$$C_n(p, q) \in AS_\rho^{m_1+m_2-n(2\rho-1)}(\mathfrak{g}^*).$$

Sous certaines hypothèses supplémentaires d'ellipticité des symboles, il est possible de mettre en évidence certaines propriétés spectrales des opérateurs associés. Nous reviendrons sur ce point à la Section 5.

Le calcul symbolique ci-dessus a été développé pour les groupes de Lie nilpotents par le second auteur [Ma1,Ma2] d'après une idée de Howe [Hw] en prenant comme point de départ le calcul fonctionnel de Weyl de Anderson [An]. Ce calcul a ensuite été généralisé à un groupe de Lie quelconque [Ma3,Ma4]. Melin avait auparavant effectué la même démarche pour les groupes de Lie nilpotents gradués en considérant des classes de symboles adaptées à ce contexte [Me].

3.1. *Lien avec le calcul h-pseudo-différentiel*

Dans ce paragraphe, nous montrons que le calcul pseudo-différentiel sur les groupes de Lie donne, comme cas particulier, le calcul h-pseudo-différentiel classique [Ro,M-N]. Le résultat est vrai en dimension quelconque, mais nous ne faisons ici les calculs que dans le cas du groupe de Heisenberg de dimension 3, ce qui correspond au calcul pseudo-différentiel à une variable.

On considère le groupe de Heisenberg G de dimension 3, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Pour $h \neq 0$, on a la représentation π_h définie dans l'introduction ((1.3) et (1.4)). Soit p un symbole défini sur $\mathfrak{g}^*$, et calculons p^{W,π_h}:

$$\begin{aligned}
[p^{W,\pi_h}\phi](x') &= \int_{\mathfrak{g}_0} (\mathcal{F}^{-1}p)(X)[\pi_h(\exp X)\phi](x')\,\mathrm{d}X \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}p)(xP + yQ + zE) \\
&\quad \times [\pi_h(\exp(xP + yQ + zE))\phi](x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}p)(xP + yQ + zE) \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}hz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hyx/2}\phi(x' - hx)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}p)\left(\frac{x' - x}{h}P + yQ + zE\right) \\
&\quad \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}hz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(x'-x)/2}\phi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|h|}\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}p)\left(\frac{x'-x}{h}P + yQ + zE\right)\\
&\quad\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}hz}\mathrm{e}^{\mathrm{i}((x+x')/2)y}\phi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= (2\pi|h|)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} p\left(\xi P^* - \tfrac{1}{2}h(x+x')Q^* + hE^*\right)\\
&\quad\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x'-x)}\phi(x)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

L'opérateur p^{W,π_h} est donc l'opérateur h-pseudo-différentiel de symbole de Weyl

$$\tilde{p}(x,\xi,h) = p(hE^* + \xi P^* - xQ^*)$$

donné par la formule:

$$\tilde{p}^W\phi(x') = (2\pi|h|)\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}((x'-x)/h)}\tilde{p}\left(\frac{x+x'}{2},\xi,h\right)\phi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\xi.$$

La limite semi-classique consiste à faire tendre h vers 0, ce qui permet de justifier l'idée suivant laquelle la mécanique classique s'obtient comme limite de la mécanique quantique lorsque la constante de Planck tend vers 0. Ceci s'interprète en termes de théorie des représentations. En effet, pour la topologie de Fell sur l'ensemble $\widehat{G}$ des classes de représentations unitaires irréductibles de G, $\pi_h \to \pi_{\xi,\nu}$ pour tout (ξ,ν) lorsque $h\to 0$ (la topologie de Fell sur $\widehat{G}$ n'est *pas* séparée !). Concrètement, soit

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= \phi_{h,\beta,\gamma}(x),\\
&= \frac{1}{2^{1/2}(\pi h)^{1/4}}\exp\left(-\frac{(x+\beta)^2}{2|h|}\right)\exp(\mathrm{i}(\gamma x)/h)
\end{aligned}
$$

dans $L(2,\mathbb{R})$. On calcule l'élément matriciel $(p^{W,\pi_h}\phi,\phi)$:

$$
\begin{aligned}
(p^{W,\pi_h}\phi,\phi) &= \frac{1}{(2^2(\pi h)^{3/2})}\int p\left(\xi P^* - \frac{1}{2}(x+x')Q^* + hE^*\right)\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{1}{2|h|}((x+\beta)^2 + (x'+\beta)^2)\right)\\
&\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma(x-x'))/h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi(x'-x)/h)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
$$

En posant $u = (x-x')/h$, $v = (x+x'+2\beta)/h$, on trouve

$$
\begin{aligned}
(p^{W,\pi_h}\phi,\phi) &= \frac{1}{2^2\pi^{3/2}}\int p(\xi P^* - (|h|^{1/2}v - \beta)Q^* + hE^*)\\
&\quad\times\exp\left(-\frac{|h|u^2}{4}\right)\\
&\quad\times\exp(-v^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma-\xi)u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

Lorsque $h\to 0$, il est clair que

$$(p^{W,\pi_h}\phi,\phi)\to p(\gamma P^* + \beta Q^*).$$

3.2. Application au groupe $\tilde{G}_\alpha$

On applique le formalisme du calcul pseudo-différentiel sur les groupes rappelé au début de cette section à la représentation $\widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}$ du groupe $\widetilde{G}_{h\delta}$. On obtient ainsi un "calcul pseudo-différentiel aux différences finies" qui permet d'utiliser les techniques d'opérateurs pseudo-différentiels pour les opérateurs aux différences finies. L' "espace des phases" sur lequel sont définis les symboles de ces opérateurs pseudo-différentiels est le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Mais on sait que pour le calcul pseudo-différentiel sur les groupes, l'opérateur $p^{W,\pi}$ ne dépend essentiellement que de la restriction du symbole à l'orbite coadjointe correspondant à la représentation [Ma4, Section III]. On obtient alors comme espace des phases pour notre calcul un cylindre elliptique, ce qui est un choix raisonnable comme "espace cotangent" à un réseau!

D'autres calculs pseudo-différentiels ou méthodes de quantification sur un réseau (ou sur le tore, ce qui revient au même via transformation de Fourier) ont été proposées [AC,BG]. Le principe consiste à adapter de manière naturelle le calcul symbolique de Weyl sur $\mathbb{R}$ aux fonctions périodiques. Le principal avantage est d'avoir ainsi une correspondance bi-univoque entre symboles et opérateurs. En revanche on n'a pas de relation de covariance de type (3.3), le groupe de Lie sous-jacent à ce calcul de Weyl étant toujours le groupe de Heisenberg et non pas $\tilde{G}_\alpha$.

4. La limite continue

Nous considérons ici l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sous-jacent à l'algèbre de Lie variable $\mathfrak{g}_\alpha$ du paragraphe précédent, ainsi que son dual $\mathfrak{g}^*$. Pour tout α, δ, λ avec $\alpha, \delta \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\alpha\delta^{-1} = h \neq 0$, et pour tout symbole p de classe C^∞ à croissance modérée sur $\mathfrak{g}^*$ tel que $\mathcal{F}^{-1}p$ soit à support compact sur $\mathfrak{g}$, on est amené, précisant les résultats du paragraphe 2.5, à se demander si l'opérateur $p^{W,\pi^\alpha_{\delta,\lambda}}$ tend vers $p^{W,\tilde{\pi}_h}$ (ou, ce qui revient au même, si $p^{W,\widehat{\pi}^\alpha_{\delta,\lambda}}$ tend vers $p^{W,\hat{\pi}_{\pm h}}$), et surtout en quel sens cette convergence a lieu.

Notre propos a des liens étroits avec la théorie quantique des champs [GJ], pages 182 et suivantes]. La différence essentielle réside dans le fait que le réseau que nous considérons s'étend d'emblée à l'infini. Autrement dit nous considérons seulement la limite continue, le passage à la limite thermodynamique étant déjà effectué.

4.1. Analyses toutes résolutions

Nous voulons déterminer en quel sens l'opérateur $p^{W,\widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ tend vers l'opérateur $p^{W,\widehat{\pi}_h} \oplus p^{W,\widehat{\pi}_{-h}}$ lorsque δ tend vers zéro. Il faut pour cela pouvoir comparer tous les espaces $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ entre eux et avec l'espace $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$.

Dans un premier temps on donne un sens précis au fait heuristique que $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ "tend vers" $L^2(\mathbb{R})$ lorsque δ tend vers zéro, en considérant une légère extension de la notion d'analyse multirésolutions au sens de Mallat et Meyer [Mal, Me, Db]. Puis on fait tendre naturellement $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ vers $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ en utilisant un isomorphisme isométrique entre $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ et la somme directe de deux copies de $l^2(2\delta(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\lambda))$.

On désigne par $\mathcal{V}_{\delta,\lambda}$ l'espace $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ dans lequel on donne à toutes les masses de Dirac la norme $\delta^{1/2}$, et on appelle *analyse toutes résolutions* de $L^2(\mathbb{R})$ la donnée d'une famille d'injections isométriques:

$$\iota_{\delta,\lambda} : \mathcal{V}_{\delta,\lambda} \xrightarrow{\sim} V_{\delta,\lambda} \subset L^2(\mathbb{R})$$

avec $\delta > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, telle que:

(1) $V_{\delta,\lambda} \subset V_{\delta',\lambda'}$ dès que $\delta(\mathbb{Z}+\lambda)$ est inclus dans $\delta'(\mathbb{Z}+\lambda')$.

(2) Pour tout δ, λ on a:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V_{2^n\delta,2^{-n}\lambda} = \{0\}, \qquad \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_{2^n\delta,2^{-n}\lambda}} = L^2(\mathbb{R}).$$

(3) Les injections $\iota_{\delta,\lambda}$commutent aux actions naturelles du groupe affine: c'est à dire que si les actions M_a et T_b sont définies (pour $a > 0$ et b réel quelconque) par:

$$M_a f(x) = a^{-1/2} f(a^{-1}x), \qquad T_b f(x) = f(x-b)$$

les deux diagrammes suivants commutent:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_{\delta,\lambda} & \overset{}{\underset{\iota_{\delta,\lambda}}{\hookrightarrow}} & L^2(\mathbb{R}) & \quad & \mathcal{V}_{\delta,\lambda} & \underset{\iota_{\delta,\lambda}}{\hookrightarrow} & L^2(\mathbb{R}) \\ \downarrow M_a & & \downarrow M_a & & \downarrow T_b & & \downarrow T_b \\ \mathcal{V}_{a\delta,\lambda} & \underset{\iota_{a\delta,\lambda}}{\hookrightarrow} & L^2(\mathbb{R}) & & \mathcal{V}_{\delta,\lambda+b/\delta} & \underset{\iota_{\delta,\lambda+b/\delta}}{\hookrightarrow} & L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

Un exemple (le "système de Haar") consiste à envoyer la masse de Dirac en $\delta(n+\lambda)$ sur l'indicatrice de l'intervalle $[\delta(n+\lambda), \delta(n+1+\lambda)[$. L'analyse toutes résolutions est dite *r-régulière,* $r \in \mathbb{N}$ ou $r = +\infty$, si toute masse de Dirac est envoyée par $\iota_{\delta,\lambda}$ sur une fonction de classe C^r à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées jusqu' à l'ordre r.

Une adaptation immédiate du Chap. II.2 de [Me], par exemple, montre qu'il existe des analyses toutes résolutions r-régulières, $r = \infty$ compris. Nous allons détailler la construction d'une analyse toutes résolutions ∞-régulière, dite de Littlewood–Paley [Me, Sections II.2, II.12].

On considère une fonction θ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans [0,1], à support contenu dans$]-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi[$, paire, égale à 1 sur $]-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi[$, et telle que:

$$\theta^2(\xi) + \theta^2(2\pi - \xi) = 1$$

pour tout $\xi \in [0, 2\pi]$. On vérifie sans peine, grâce aux propriétés de la fonction θ, que si g désigne la transformée de Fourier inverse de θ, g appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'ensemble des $T_b g$, $b \in \mathbb{Z}$ forme une base orthonormée d'un sous-espace fermé $V_{1,0}$ de $L^2(\mathbb{R})$, ce qui nous donne une injection isométrique:

$$\iota_{1,0} : l^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} V_{1,0} \subset L^2(\mathbb{R}).$$

On construit alors les injections $\iota_{\delta,\lambda}$ en faisant naturellement agir le groupe affine. La transformation de Fourier $\mathcal{F}V_{1,0}$ de l'espace $V_{1,0}$ est l'espace des fonctions $m \cdot \theta$, où m est 2π-périodique et appartient à $L^2([0, 2\pi[)$. On en déduit que $\mathcal{F}V_{\delta,\lambda}$ est l'ensemble des $\xi \mapsto e^{2i\pi\delta\lambda\xi}(m.\theta)(\delta\xi)$ où m est 2π-périodique et appartient à $L^2([0, 2\pi[)$.

Les propriétés (2) et (3) des analyses toutes résolutions sont donc vérifiées. Pour la (1) on se ramène à $\delta = 1$ et $\lambda = 0$ par l'action du groupe affine. On a alors $\delta' = k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda' = 0$. Il suffit alors de remarquer que l'on peut écrire:

$$\theta(\xi) = f(\xi)\theta(k^{-1}\xi)$$

où l'on peut supposer que f est C^∞ et périodique de période $2k\pi$. Ainsi $\mathcal{F}(V_{1,0})$ est contenu dans $\mathcal{F}(V_{k^{-1},0})$, et donc $\mathcal{F}(V_{\delta,\lambda})$ est contenu dans $\mathcal{F}(V_{\delta',\lambda'})$ dès que $\delta(\mathbb{Z} + \lambda)$ est inclus dans $\delta'(\mathbb{Z} + \lambda')$.

4.2. Analyses toutes résolutions ∞-régulières et espaces de Schwartz

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz usuel sur $\mathbb{R}$, et soit $\mathcal{S}_{\delta,\lambda}$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\delta(\mathbb{Z}+\lambda)$. Ces espaces de Fréchet admettent comme dual fort respectivement l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions à croissance modérée, et l'espace $\mathcal{S}'_{\delta,\lambda}$ des fonctions à croissance modérée sur $\delta(\mathbb{Z} + \lambda)$.

Proposition 4.1. *Soit $(\iota_{\delta,\lambda})$ une analyse toutes résolutions ∞-régulière de $L^2(\mathbb{R})$. Alors l'injection $\iota_{\delta,\lambda}$ envoie $\mathcal{S}_{\delta,\lambda}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition d'une analyse toutes résolutions ∞-régulière et du fait que si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite à décroissance rapide, les sommes partielles:

$$g_n(x) = \sum_{-n}^{n} a_n f(x-n)$$

convergent dans l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers une fonction $g(x)$. □

Soit $(\iota_{\delta,\lambda})$ une analyse toutes résolutions ∞-régulière de $L^2(\mathbb{R})$, soit $E_{\delta,\lambda}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur $V_{\delta,\lambda}$, et soit $F_{\delta,\lambda} = \iota_{\delta,\lambda}^{-1} \circ E_{\delta,\lambda}$. La composée $F_{\delta,\lambda} \circ \iota_{\delta,\lambda}$ est l'identité de $\mathcal{H}_{\delta,\lambda}$, et $F_{\delta,\lambda}$ est l'adjoint de $\iota_{\delta,\lambda}$. On a donc par dualité un prolongement de $F_{\delta,\lambda} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'_{\delta,\lambda}$, et de $\iota_{\delta,\lambda} : \mathcal{S}'_{\delta,\lambda} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La projection orthogonale $E_{\delta,\lambda}$ s'étend donc elle aussi, par composition, en un opérateur de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ danc lui-même.

L'opérateur $E_{\delta,\lambda}$ est un opérateur pseudo-différentiel (au sens classique du terme) dont le symbole à gauche $\sigma_{\delta,\lambda}$ est tel que $1 - \sigma_{\delta,\lambda}(x, \xi)$ s'annule à tout ordre sur toute la droite $\xi = 0$ [Me, Section II.10]. Il vérifie done l'identité remarquable:

$$E_{\delta,\lambda}(P) = P$$

pour tout polynôme P.

4.3. La limite continue

Nous avons construit à la Section 2.1 une représentation unitaire irréductible $\widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}$ du groupe variable G_α, pour tout $\alpha, \delta \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ainsi qu'une représentation unitaire irréductible $\widehat{\pi}_h$ du groupe de Heisenberg G_0, pour tout $h \neq 0$. La représentation $\widehat{\pi}^{\alpha}_{\delta,\lambda}$ agit dans $\mathcal{V}_{\delta,\lambda}$ alors que $\hat{\pi}_h$ agit dans $L^2(\mathbb{R})$.

L'espace $\mathcal{S}_{\delta,\lambda}$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) est l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation $\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}$ (resp. π_h). La proposition 4.1 assure donc que les vecteurs C^∞ se correspondent bien par les injections $\iota_{\delta,\lambda}$ d'une analyse toutes résolutions ∞-régulière.

On considère dans $\mathcal{V}_{\delta,\lambda}$ l'opérateur $U_{\delta,\lambda}$ défini par:

$$U_{\delta,\lambda} \cdot f(\delta(n+\lambda)) = (-1)^n f(\delta(n+\lambda))$$

et on considère l'injection isométrique $\jmath$ de $\mathcal{V}_{2\delta,\lambda/2}$ dans $\mathcal{V}_{\delta,\lambda}$ définie par:

$$\jmath \cdot f(\delta(n+\lambda)) = f\left(2\delta\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{\lambda}{2}\right)\right)$$

On vérifie sans peine le résultat suivant:

Proposition 4.2. *L'application* $(\jmath, U_{\delta,\lambda} \circ \jmath)$ *de* $\mathcal{V}_{2\delta,\lambda/2} \oplus \mathcal{H}_{2\delta,\lambda/2}$ *dans* $\mathcal{V}_{\delta,\lambda}$ *est un isomorphisme isométrique, dont l'inverse est donné par:*

$$\begin{pmatrix} R \\ R \circ U_{\delta,\lambda} \end{pmatrix}$$

où R est l'adjoint de l'injection $\jmath$ *et est donné par:*

$$Rf(2\delta(n + \tfrac{1}{2}\lambda)) = \tfrac{1}{2} f(\delta(2n+\lambda)) + f(\delta(2n+1+\lambda)).$$

On peut donc voir tout opérateur agissant sur l'espace $\mathcal{V}_{\delta,\lambda}$ comme une matrice 2×2 par blocs via l'isomorphisme ci-dessus. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal:

Théorème 4.3. *Soit* $(\iota_{\delta,\lambda})$ *une analyse toutes résolutions de Littlewood–Paley de* $L^2(\mathbb{R})$. *Alors pour toute fonction p à croissance modérée sur* $\mathfrak{g}^*$ *et dont la transformée de Fourier est à support compact, pour tout* $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \iota_{2\delta,\lambda/2} & 0 \\ 0 & \iota_{2\delta,\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ R \circ U_{\delta,\lambda} \end{pmatrix} \circ p^{W,\widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}} \\ &\quad \circ (\jmath, U_{\delta,\lambda} \circ \jmath) \begin{pmatrix} F_{2\delta,\lambda/2} & 0 \\ 0 & F_{2\delta,\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &\quad \xrightarrow[\delta \to 0]{} \begin{pmatrix} p^{W,\widehat{\pi}_h} & 0 \\ 0 & p^{W,\widehat{\pi}_{-h}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *au sens Fréchet.*

On commence par montrer ce résultat pour l'action des éléments du groupe variable:

Lemme 4.4. *Soit $(\iota_{\delta,\lambda})$ une analyse toutes résolutions de Littlewood–Paley de $L^2(\mathbb{R})$. Alors pour tout $X \in \mathfrak{g}$, pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$,*

$$\begin{pmatrix} \iota_{2\delta,\lambda/2} & 0 \\ 0 & \iota_{2\delta,\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ R \circ U_{\delta,\lambda} \end{pmatrix} \circ \widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}(\exp_{h\delta} X)$$

$$\circ (j, U_{\delta,\lambda} \circ j) \begin{pmatrix} F_{2\delta,\lambda/2} & 0 \\ 0 & F_{2\delta,\lambda/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\delta \to 0]{} \begin{pmatrix} \widehat{\pi}_h(\exp_0 X) & 0 \\ 0 & \widehat{\pi}_{-h}(\exp_0 X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R})$ au sens Fréchet et uniformément pour tout X appartenant à un compact quelconque de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il est plus aisé de travailler dans le modèle pseudo-périodique : on désignera par $\mathcal{F}$ aussi bien la transformation de Fourier de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par:

$$\mathcal{F} f(\xi) = \int f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \,\mathrm{d}x$$

que la transformation de Fourier de $\mathcal{H}_{\delta,\lambda}$ dans $l^2(\delta(\mathbb{Z}+\lambda))$ normalisée, définie par:

$$\mathcal{F} f(\delta(n+\lambda)) = \int_0^{2\pi\delta^{-1}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta(n+\lambda)x} \,\mathrm{d}x.$$

Avec ces normalisations l'identité de Parseval s'écrit dans tous les cas:

$$\|\mathcal{F} f\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

On met un tilde au-dessus de tout opérateur conjugué par transformée de Fourier inverse: $\tilde{A} = \mathcal{F}^{-1} \circ A \circ \mathcal{F}$ □

Lemme 4.5. *Soit θ la fonction plateau ayant servi à construire l'analyse toutes résolutions de Littlewood–Paley $(\iota_{\delta,\lambda})$. Alors pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$ on a:*

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{1,0}(u)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(x+2k\pi) u(x+2k\pi) \\ &= \theta(x-2\pi) u(x-2\pi) + \theta(x) \mu(x) + \theta(x+2\pi) u(x+2\pi) \end{aligned}$$

et pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ on a:

$$\tilde{\iota}_{1,0}(\varphi)(x) = \theta(x)\varphi(x).$$

Démonstration. On a vu à la Section 4.1 que $\tilde{\imath}_{1,0}$ est une injection isométrique. Si on pose:

$$\begin{aligned} Af(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta(x+2k\pi) f(x+2k\pi) \\ &= \theta(x-2\pi) f(x-2\pi) + \theta(x) f(x) + \theta(x+2\pi) f(x+2\pi) \end{aligned}$$

on a pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} (A \circ \tilde{\imath}_{1,0})\varphi(x) &= \theta^2(x-2\pi)\varphi(x-2\pi) + \theta^2(x)\varphi(x) + \theta^2(x+2\pi)\varphi(x+2\pi) \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

grâce aux propriétés de θ. Le composé $\tilde{\imath}_{1,0} \circ A$, donné par:

$$\begin{aligned} (\tilde{\imath}_{1,0} \circ A)u(x) = \theta(x)(&\theta(x-2\pi)u(x-2\pi) \\ &+ \theta(x)u(x) + \theta(x+2\pi)u(x+2\pi)) \end{aligned}$$

est donc un projecteur. Il est auto-adjoint, donc c'est un projecteur orthogonal, donc $\tilde{\imath}_{1,0} \circ A = \tilde{E}_{1,0}$ et $A = \tilde{F}_{1,0}$. □

Par l'action naturelle du groupe affine on obtient donc une expression explicite analogue pour tout (δ, λ):

Corollaire 4.6. *Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$ on a:*

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\delta,\lambda}(u)(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta(\delta x + 2k\pi) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi\lambda} f(x + 2k\pi\delta^{-1}) \\ &= (\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\lambda}\theta(\delta x - 2\pi)u(x - 2\pi\delta^{-1}) + \theta(\delta x)u(x) \\ &\quad + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\lambda}\theta(\delta x + 2\pi)u(x + 2\pi\delta^{-1})) \end{aligned}$$

et pour tout $\varphi \in L^2_\lambda(\mathbb{R}/2\pi\delta^{-1}\mathbb{Z})$ on a:

$$\tilde{\imath}_{\delta,\lambda}(\varphi)(x) = \theta(\delta x)\varphi(x)$$

et la projection orthogonale $\tilde{E}_{\delta,\lambda}$ sur $\mathcal{F}V_{\delta,\lambda}$ est donnée par:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\delta,\lambda}u(x) = \theta(\delta x)(&\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\lambda}\theta(\delta x - 2\pi)u(x - 2\pi\delta^{-1}) \\ &+ \theta(\delta x)u(x) + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\lambda}\theta(\delta x + 2\pi)u(x + 2\pi\delta^{-1})). \end{aligned}$$

Lemme 4.7. *Les opérateurs:*

$$\tilde{J}: \mathcal{H}_{2\delta,\frac{\lambda}{2}} \to \mathcal{H}_{\delta,\lambda}, \quad \tilde{U}_{\delta,\lambda}: \mathcal{H}_{\delta,\lambda} \to \mathcal{H}_{\delta,\lambda}, \qquad \tilde{R}: \mathcal{H}_{\delta,\lambda} \to \mathcal{H}_{2\delta,\frac{\lambda}{2}}$$

sont donnés respectivement par:

$$\begin{aligned} &\tilde{J} \cdot f(x) = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta x}) f(x), \tilde{U}_{\delta,\lambda} \cdot f(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\lambda} f\left(x + \frac{\pi}{\delta}\right), \\ &\tilde{R} \cdot f(x) = \frac{1}{4}\left((1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta x}) f(x) + (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta x}) f\left(x + \frac{\pi}{\delta}\right)\right) \end{aligned}$$ □

Démonstration. Le calcul est laissé au lecteur.

Fin de la démonstration du Lemme 4.4. On peut donc maintenant faire des calculs explicites. On obtient:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{\iota}_{2\delta,\lambda/2} & 0\\ 0 & \tilde{\iota}_{2\delta,\lambda/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{R}\\ \tilde{R}\circ\tilde{U}_{\delta,\lambda}\end{pmatrix}\circ\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}(\exp_{h\delta} tP)\\ &\circ(\tilde{j}\tilde{U}_{\delta,\lambda}\circ\tilde{j})\begin{pmatrix}\tilde{F}_{2\delta,\lambda/2} & 0\\ 0 & \tilde{F}_{2\delta,\lambda/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}(x)\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta ht} & 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta ht}\\ 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta ht} & 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta ht}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{E}_{2\delta,\lambda/2}u_t\\ \tilde{E}_{2\delta,\lambda/2}v_t\end{pmatrix}(x)\end{aligned}$$

avec $u_t(x) = u(x - ht)$ et $v_t(x) = v(x - ht)$

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{\iota}_{2\delta,\lambda/2} & 0\\ 0 & \tilde{\iota}_{2\delta,\lambda/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{R}\\ \tilde{R}\circ\tilde{U}_{\delta,\lambda}\end{pmatrix}\circ\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}(\exp_{h\delta} tQ)\\ &\circ(\tilde{j}\tilde{U}_{\delta,\lambda}\circ\tilde{j})\begin{pmatrix}\tilde{F}_{2\delta,\lambda/2} & 0\\ 0 & \tilde{F}_{2\delta,\lambda/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}(x)\\ &=\begin{pmatrix}\cos(Z)+\mathrm{i}\cos(\delta x)\sin(Z) & \sin(\delta x)\sin(Z)\\ -\sin(\delta x)\sin(Z) & \cos(Z)-\mathrm{i}\cos(\delta x)\sin(Z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{E}_{2\delta,\lambda/2}u\\ \tilde{E}_{2\delta,\lambda/2}v\end{pmatrix}(x),\end{aligned}$$

where $Z = t\delta^{-1}\sin(\delta x)$,

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\tilde{\iota}_{2\delta,\lambda/2} & 0\\ 0 & \tilde{\iota}_{2\delta,\lambda/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{R}\\ \tilde{R}\circ\tilde{U}_{\delta,\lambda}\end{pmatrix}\circ\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}(\exp_{h\delta} tE)\\ &\circ(\tilde{j}\tilde{U}_{\delta,\lambda\circ\tilde{j}})\begin{pmatrix}\tilde{F}_{2\delta,\lambda/2} & 0\\ 0 & \tilde{F}_{2\delta,\lambda/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}(x)\\ &=\begin{pmatrix}\cos(Z')-\mathrm{i}\cos(\delta x)\sin(Z') & -\sin(\delta x)\sin(Z')\\ \sin(\delta x)\sin(Z') & \cos(Z)+\mathrm{i}\cos(\delta x)\sin(Z')\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{E}_{2\delta,\lambda/2}u\\ \tilde{E}_{2\delta,\lambda/2}v\end{pmatrix}(x),\end{aligned}$$

where $Z' = th\cos(\delta x)$.

Lorsque δ tend vers zéro, ces fonctions de x convergent dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})\oplus\mathcal{S}(\mathbb{R})$ vers

$$\begin{pmatrix}\pi_h(\exp_0 tP) & 0\\ 0 & \pi_{-h}(\exp_0 tP)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\pi_h(\exp_0 tQ) & 0\\ 0 & \pi_{-h}(\exp_0 tQ)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\pi_h(\exp_0 tE) & 0\\ 0 & \pi_{-h}(\exp_0 tE)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},$$

respectivement, ce qui démontre le Lemme 4.4.

Le Théorème 4.3 se déduit immédiatement du Lemme 4, grâce à l'écriture de $p^{W,\pi}u$ donnée à la Section 3.

4.4. Remarque sur les ondelettes

Nous adaptons à notre propos la présentation des ondelettes telle qu'elle se trouve dans [Me, Section III.2] ou [Db, Section 5.1]. La seule différence avec les définitions traditionnelles réside dans la prise en compte du paramètre de phase λ. Nous donnons une construction purement "opératorielle" de la mère des ondelettes à partir du père des ondelettes, sans faire intervenir l'analyse de Fourier.

Soit $(\iota_{\delta,\lambda})$ une analyse toutes résolutions de $L^2(\mathbb{R})$. On désigne par V_n^λ l'espace noté $V_{2^{-n},2^n\lambda}$ au Section 4.1. Les V_n^λ, $n \in \mathbb{Z}$ forment donc une suite croissante de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$, d'intersection nulle et de réunion dense. Désignant par W_n^λ l'orthogonal de V_n^λ dans V_{n+1}^λ, on a une somme directe dense dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n^\lambda$$

qui s'écrit aussi:

$$V_0^\lambda \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W_n^\lambda .$$

Le père des ondelettes est la fonction $\varphi^\lambda \in V_0^\lambda$ image par $\iota_{1,\lambda}$ de la masse de Dirac au point λ. La mère des ondelettes est une fonction $\psi^\lambda \in W_0^\lambda$, telle que les $(T_b\psi)_{b\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de W_0^λ. L'ensemble:

$$\{\psi_{n,b}^\lambda = T_\lambda M_{2^n} T_b T_{-\lambda}\psi,\ n \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\}$$

est alors une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, ainsi que l'ensemble:

$$\{\varphi_b^\lambda = T_b\varphi^\lambda,\ b \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_{n,b}^\lambda,\ n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut construire la mère des ondelettes de la façon suivante: l'inclusion de V_0^λ dans V_1^λ implique une inclusion isométrique:

$$\jmath : l^2(\mathbb{Z} + \lambda) \hookrightarrow l^2\left(\tfrac{1}{2}\mathbb{Z} + \lambda\right)$$

commutant aux translations T_b, $b \in \mathbb{Z}$, définie par:

$$\iota_{1/2,2\lambda} \circ \jmath(D_\lambda) = \varphi^\lambda$$

où D_λ désigne la masse de Dirac au point λ. On a donc:

$$\jmath(D_\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \sqrt{2} D_{\lambda+n/2}$$

ce qui s'écrit aussi via l'injection $\iota_{1/2,2\lambda}$:

$$\varphi^\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \sqrt{2} \varphi^\lambda(2x - n + \lambda)$$

ou encore:

$$\varphi^\lambda\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\sqrt{2}\varphi^\lambda(x-n+\lambda)$$

Le problème est donc de déterminer l'orthogonal de $\jmath(l^2(\mathbb{Z}+\lambda))$ dans $l^2(\frac{1}{2}\mathbb{Z}+\lambda)$, et d'en trouver une base orthonormée. On considère dans $\frac{1}{4}\mathbb{Z}+\lambda$ la symétrie S par rapport au point $\lambda+\frac{1}{2}$ et l'opérateur U du Section 1.4, défini par:

$$U(D_{n/2+\lambda})=(-1)^n D_{n/2+\lambda}$$

Considérant l'opérateur unitaire:

$$V=U\circ S$$

On a les relations:

$$S^2=U^2=I,\qquad US=-SU,$$
$$T_bV=VT_{-b}\quad\text{pour tout } b\in\mathbb{Z}$$

ce qui implique immédiatement pour tout entier b:

$$(T_bV)^2=-I.$$

Les opérateurs T_bV sont donc unitaires et anti-auto-adjoints. L'action du groupe engendré par V et T_1 est irréductible dans $l^2(1/2\mathbb{Z}+\lambda)$ (on se convainc sans peine que le vecteur D_λ est cyclique), donc:

Proposition 4.8. *Pour toute injection isométrique:*

$$\jmath\,:\,l^2(\mathbb{Z}+\lambda)\hookrightarrow l^2(\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}+\lambda)$$

commutant aux translations $(T_b)_{b\in\mathbb{Z}}$, l'orthogonal de $\jmath(l^2(\mathbb{Z}+\lambda))$ dans $l^2(1/2\mathbb{Z}+\lambda)$ est donné par:

$$(\jmath(l^2(\mathbb{Z}+\lambda)))^\perp=V(\jmath(l^2(\mathbb{Z}+\lambda)))$$

Dans le cas qui nous inéresse ici, l'orthogonal de $\jmath(l^2(\mathbb{Z}+\lambda))$ dans $l^2(1/2\mathbb{Z}+\lambda)$ admet donc $\{T_bV(\jmath(D_\lambda)),\, b\in\mathbb{Z}\}$ comme base orthonormée. On choisit la mère des ondelettes comme étant:

$$\psi^\lambda=\iota_{1/2,2\lambda}(V\circ\jmath(D_\lambda))$$

ce qui se traduit par:

$$\psi^\lambda(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\alpha_n\sqrt{2}\varphi^\lambda(2x+n-1+\lambda)$$

soit encore:

$$\psi^\lambda\left(\frac{x+1}{2}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\sqrt{2}\varphi^\lambda(x+n+\lambda).$$

5. Applications à la théorie spectrale

5.1. Une conjecture sur le comportement du spectre

Soit p un symbole sur $\mathfrak{g}^*$. On suppose qu'il appartient à la classe de symboles $AS_\rho^{m,K}(\mathfrak{g}^*)$ définie dans [Ma4], c'est à dire que p est de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ et vérifie:

$$|D^\alpha p(\xi)| \leq C_\beta \cdot (1 + \|\xi\|^2)^{(m-\rho|\beta|)/2} \text{ pour tout multi-indice } \beta$$
$$\mathcal{F}^{-1} p \text{ a son support inclus dans K}$$

où K est un voisinage compact de l'origine dans $\mathfrak{g}$ assez petit, m est un réel quelconque et ρ appartient à $]\frac{1}{2}, 1]$.

Supposons de plus que $m > 0$, et que le symbole p soit à valeurs réelles et elliptique dans la direction de toutes les orbites co-adjointes que nous considérons, c'est à dire qu'il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout ξ assez grand appartenant au cône asymptote à l'une de ces orbites on a:

$$C_1 \|\xi\|^m < p(\xi) < C_2 \|\xi\|^m$$

Alors les résultats de [Ma 4] nous permettent de dire que les opérateurs $p^{W,\widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ ainsi que $p^{W,\widehat{\pi}\pm h}$ sont auto-adjoints, ont une résolvante compacte et un spectre discret borné à gauche. De plus on a une formule asymptotique du type Weyl qui donne une estimation du nombre $N_{\delta,\lambda}(t)$ (resp. $N_0^\pm(t)$) de valeurs propres de $p^{W,\widehat{\pi}^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ (resp. $p^{W,\widehat{\pi}\pm h}$) inférieures strictement à t, lorsque t tend vers l'infini:

$$N_{\delta,\lambda}(t) \sim V_\delta(t) = \int_{\Omega_\delta^{h\delta} \cap \{p<t\}} \mathrm{d}\beta_{\Omega_\delta^{h\delta}}, \tag{5.1}$$

$$N_0^\pm(t) \sim V_0^\pm(t) = \int_{\Omega_{\pm h} \cap \{p<t\}} \mathrm{d}\beta_{\Omega_{\pm h}}. \tag{5.2}$$

Cette formule reliant l'asymptotique du spectre d'un opérateur $p^{W,\pi}$ au volume du domaine $\{p < t\}$ dans l'orbite associée à la représentation π a été établie par A. Juhl [Ju] pour les groupes nilpotents moyennant certaines conditions sur π. Elle a été démontrée par le second auteur en toute généralité dans le cas nilpotent [Ma1], puis dans le cas d'un groupe de Lie quelconque [Ma4].

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'autre asymptotique: nous fixons le paramètre spectral t et nous voulons déterminer le comportement de $N_{\delta,\lambda}(t)$ lorsque δ tend vers 0 (à $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) fixé).

Théorème 5.1. *Lorsque δ est proche de 0 on a:*

$$N_{\delta,\lambda}(t) \geq N_0^+(t) + N_0^-(t).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du Théorème 4.3 et des résultats classiques de Kato sur la convergence forte au sens généralisé [K, Chap. VIII, Theorem 1.15].

Nous sommes donc naturellement amenés à formuler la conjecture suivante:

Conjecture 5.2.

$$\lim_{\delta\to 0} N_{\delta,\lambda}(t) = N_0^+(t) + N_0^-(t).$$

On peut remarquer que l'on a:

$$\lim_{\delta\to 0} V_\delta(t) = V_0^+(t) + V_0^-(t).$$

de sorte que, au vu de (5.1) et (5.2) la conjecture est "asymptotiquement vraie" lorsque t tend vers $+\infty$.

5.2. *Un exemple*

On se place ici dans le modèle pseudo-périodique plutôt que dans le modèle discret. On considère le symbole p sur $\mathfrak{g}^*$ défini par:

$$p(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

où le point courant de $\mathfrak{g}^*$ s'écrit $\xi = \xi_1 P^* + \xi_2 Q^* + \xi_3 E^*$. Ce symbole est elliptique dans la direction de toutes les orbites co-adjointes que nous avons considérées.

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur $p^{W,\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$, c'est résoudre l'équation différentielle du second ordre à coefficients périodiques:

$$-h^2\ddot{\varphi}(\theta) + \left(\frac{1}{\delta^2}\sin^2\delta\theta - t\right)\varphi(\theta) = 0 \tag{5.3}$$

qui devient, après le changement de variable $s = \delta\theta$:

$$\ddot{\varphi}(s) + \left(\frac{t}{h^2\delta^2} - \frac{1}{2h^2\delta^4} + \frac{1}{2h^2\delta^4}\cos 2s\right)\varphi(s) = 0 \tag{5.4}$$

En posant:

$$p = \frac{t}{h^2\delta^2} - \frac{1}{2h^2\delta^4} \quad \text{et} \quad q = -\frac{1}{4h^2\delta^2}$$

on obtient l'équation de Mathieu:

$$\ddot{\varphi} + (p - 2q\cos 2s)\varphi = 0 \tag{5.5}$$

qui admet une solution périodique à $e^{2i\pi\lambda}$ près si et seulement si p et q sont liés par une certaine équation transcendante [Cp, Chaps. I, VII, VIII]. A q fixé on obtient une suite $p_n(q,\lambda)$ dont on connaît précisément le comportement lorsque q tend vers $-\infty$ ([Cp, Sections IV.2, IX.2].

On obtient donc ainsi le comportement de la suite $(t_n(\delta, \lambda))_{n=1,2,\ldots}$ des valeurs propres de $p^{W,\pi^{h\delta}_{\delta,\lambda}}$ lorsque δ tend vers zéro. Plus précisément on a:

$$t_{2k-1}(\delta, \lambda) \overrightarrow{\delta \to 0} (2k-1)h, \qquad t_{2k}(\delta, \lambda) \overrightarrow{\delta \to 0} (2k-1)h \tag{5.6}$$

De plus, si le paramètre de phase est non nul, les valeurs propres sont doubles, c'est à dire que $t_{2k}(\delta, \lambda) = t_{2k-1}(\delta\lambda)$ [Cp, Section VII.1].

Par ailleurs, trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur $p^{W,\pi \pm h}$, c'est résoudre l'équation différentielle du second ordre:

$$-h^2\ddot{\varphi} + x^2\varphi = t\varphi \tag{5.7}$$

bien connue (oscillateur harmonique). On remarque grâce à la symétrie du symbole p que les deux opérateurs p^{W,π_h} et $p^{W,\pi_{-h}}$ sont égaux. Les valeurs propres de l'opérateur:

$$\begin{pmatrix} p^{W,\pi_h} & 0 \\ 0 & p^{W,\pi-h} \end{pmatrix}$$

sont donc doubles, de la forme:

$$t_{2k-1} = t_{2k} = (2k-1)h$$

On a donc dans ce cas $N_0^+(t) = N_0^-(t)$,

$$N_0^+(t) + N_0^-(t) = 2\left[\frac{t}{2h}\right]$$

et la Conjecture 5.2 est bien vérifiée dans ce cas.

Remarque. Lisette Jager démontre dans sa thèse [J], moyennant une hypothèse technique sur le spectre, la conjecture 5.2 pour le même exemple mais sur le groupe de Poincaré. L'opérateur s'écrit de la même façon en remplaçant les sinus par des sinus hyperboliques, et l'équation de Mathieu est remplacée par l'équation de Mathieu modifiée. Cf aussi [U].

Bibliographie

[A] M. Andler, La formule de Plancherel pour les groupes algébriques complexes, Acta Math. (1985) 1–104.

[AC] D. Arnal, J.-C. Cortet, Star, representation on the euclidean two-dimensional group E(2), Lett. Math. Phys (1994).

[An] R.F.V. Anderson, The Weyl functional calculus, J. Funct. Anal. 4 (1969).

[B-C-D] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo et al., Représentations des groupes de Lie résolubles, Monographie Soc. Math., Dunod, Paris, France, 1972.

[B-G] S. de Bievre, J.A. González, Semiclassical behaviour of coherent states on the circle, in: Proceedings of the XIth Workshop on Geometrical Methods in Physics, Bialowieza, 1992.

[C-dB] C. Cishahayo, S. de Bièvre, On the contraction of the discrete series of SU (1, 1), Ann. Inst. Fourier 43 (1993) 551–567.

[Cp] R. Campbell, Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique, Paris, 1955.

[Db] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, Philadelphia, 1992.

[Do] A. Dooley, Contractions of Lie groups and applications to analysis, Topics in Moderns Harmonic Analysis, vol. I, Instituto nazionale di Alta matematica Francesco Severi, Rome, 1983.

[D-R] A. Dooley, J.W. Rice, On contractions of semi-simple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. (1985) 185–202.

[Fe] J.M.G. Fell, Weak containment and induced representations of groups II, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964) 424–447.

[G-J] J. Glimm, A. Jaffe, Quantum Physics, New York, 1981.

[Hw] R. Howe, A symbolic calculus for nilpotent Lie groups, Proceedings of the Conference on Operator Algebras and Group Representations, Neptun, Romania, 1980.

H-R-W] R. Howe, G. Ratcliff, N. Wildberger, Symbol mappings for certain nilpotent groups, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1077, Springer, Berlin, 1982.

[J] L. Jager, Thèse de doctorat, Université de Reims, 1994.

[Ju] A. Juhl, Orbit method for nilpotent Lie groups and distribution of eigenvalues, Math. Nachr. 116 (1984).

[K] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.

[L-L] H. Leptin, J. Ludwig, Unitary Representation Theory of Exponential Lie Groups, de Gruyter, Berlin, 1994.

[M-N] V.P. Maslov, V.E. Nazaikinskii, Asymptotics of Operator and Pseudodifferential Equations (Engl. transl.), New York, 1988.

[Mal] S. Mallat, Multiresolution approximation and wavelets orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer. Math. Soc (1989).

[Ma 1] D. Manchon, Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents, J. Reine Angew. Math. 418 (1991) 77–129.

[Ma 2] D. Manchon, Calcul symbolique sur les groupes de Lie et applications, J. Func. Anal. 102 (1991) 206–251.

[Ma3] D. Manchon, Weyl symbolic calculus on any Lie group, Acta App. Math. 2 (1993) 159–183.

[Ma 4] D. Manchon, Opérateurs pseudodifférentiels et représentations unitaires des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France 123 (1995).

[Me] Y. Meyer, Ondelettes et Opérateurs t.1, Hermann, Paris, 1990.

[Mel] A. Melin, Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups, Ann. Glob. Anal. Geom. 1 (1983).

[Ro] D. Robert, Autour de l'Approximation Semi-classique, Birkhaüser, Boston, 1987.

[U] A. Unterberger, L'Oscillateur relativiste et les fonctions de Mathieu, Bull. Soc. Math. (France) 121 (1993).